ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU PREMIER DEGRÉ

(3UAA5 : outils algébriques)

Le retour à l'école n'étant pas encore prévu tout de suite pour les classes de 3ème année, nous n'allons pas pouvoir aborder la dernière méthode de factorisation appelée la méthode d'Horner car c'est trop complexe à expliquer ici. Par contre, je vous propose le chapitre sur les équations de degré supérieur à 1. En effet, il est aisé de réduire ces équations au premier degré en appliquant la factorisation vue précédemment (sans utilisation d'Horner). Ceci n'est évidemment pas obligatoire puisqu'on peut considérer qu'il s'agit de nouvelle matière.

Règle du produit nul

Quand une somme de 2 termes est-elle nulle ?

$a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$ c'est-à-dire si a est l'opposé de b.
Il existe donc une infinité de solutions : a = 2 et b = -2 ; a = -5 et b = 5 ; a = 14 et b = -14 ; …

Quand un produit de 2 facteurs est-il nul ?

$a . b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ c'est-à-dire si l'un des facteurs au moins est nul.
Il n'existe donc que 2 solutions !

Si le produit est composé de 3 facteurs, il y aura 3 solutions : $a . b . c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$.
Et ainsi de suite …

En français : ***un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.***

En math : $\boldsymbol{a . b = 0 \Leftrightarrow a = 0}$ ***ou*** $\boldsymbol{b = 0}$

Equations produits

Une équation produit est une équation de la forme **a . b = 0** où a et b sont des expressions algébriques.

Pour résoudre une telle équation, on utilise la règle du produit nul et on résout séparément chaque équation obtenue.

Exemple :

$(x - 3) . (2x + 5) = 0$ *(équation produit)*

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $2x + 5 = 0$ *(on applique la règle du produit nul)*

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $2x = -5$ *(on résout séparément chaque équation du premier degré)*

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \frac{-5}{2}$

3 et $\frac{-5}{2}$ sont les solutions de l'équation. On note : $S = \{ 3 ; \frac{-5}{2} \}$

Résolution d'équations de degré supérieur à 1

Nous allons utiliser la règle du produit nul pour résoudre des équations du 2ème, 3ème, … degré.

Dans « produit nul », il y a ***produit*** et ***nul*** !

- ***Nul***

  ⇨ Nous allons donc tout d'abord déplacer tous les termes de l'expression algébrique dans le membre de gauche afin de rendre le membre de droite nul.

- ***Produit***

  ⇨ Nous allons ensuite transformer la somme (ou différence) de termes obtenue dans le membre de gauche en un produit, c'est-à-dire que nous allons factoriser.

Méthode de résolution :

1) ***Rendre le deuxième membre égal à zéro.***
2) ***Factoriser au maximum le premier membre de manière à obtenir, si possible, des facteurs du 1er degré.***
3) ***Appliquer la règle du produit nul et résoudre séparément chaque équation obtenue.***

Exemples :

$5x^2 = 15x$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 15x = 0$ *(on rend le deuxième membre égal à zéro)*

$\Leftrightarrow 5x \cdot (x - 3) = 0$ *(on factorise le premier membre)*

$\Leftrightarrow 5x = 0$ ou $x - 3 = 0$ *(on applique la règle du produit nul)*

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ *(on résout séparément chaque équation)*

$S = \{ 0 ; 3 \}$

$x^3 = 16x$

$\Leftrightarrow x^3 - 16x = 0$ *(on rend le deuxième membre égal à zéro)*

$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 16) = 0$ *(on factorise le premier membre)*

$\Leftrightarrow x \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$ *(on applique la règle du produit nul)*

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$ ou $x = -4$ *(on résout séparément chaque équation)*

$S = \{ -4 ; 0 ; 4 \}$

Remarque : en général, on essaie de classer les solutions par ordre croissant.